CHAPITRE 5 : Moment cinétique et solide en rotation

Le principe fondamental de la dynamique relie la variation de la quantité de mouvement aux forces appliquées. Pourtant, pour les systèmes en rotation, la notion de force n'est pas toujours la plus pertinente. Dans ce chapitre, on introduit deux nouvelles grandeurs mécaniques : le moment cinétique et le moment d'une force. On relie alors la variation du moment cinétique aux moments des forces appliquées au système.

1. Moment cinétique d'un point matériel

1.1. Définition du moment cinétique

On considère un point matériel M de masse m animé d'une vitesse $\vec{v}$ dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}(O,x,y,z)$. On note $\vec{p}=m\vec{v}$ sa quantité de mouvement. On considère également un axe orienté $\Delta=(O,\vec{u}_\Delta)$ determiné par un point O et un vecteur unitaire $\vec{u}_\Delta$ dont le sens précise l'orientation de l'axe.

1.1.1. Moment cinétique par rapport à un point O

Le moment cinétique du point M par rapport à un point fixe O est le vecteur défini par le produit vectoriel :

$$\boxed{\vec{L}_O=\overrightarrow{OM}\wedge\vec{p}=\overrightarrow{OM}\wedge m\vec{v}}$$

Sa norme se mesure en $\mathrm{kg.m^{-2}.s^{-1}}=\mathrm{J.s}$. Le moment cinétique par rapport à un point O est défini à partir de la vitesse de M, il dépend donc du référentiel dans lequel on le détermine.

Propriétés du moment cinétique par rapport à un point

De par sa définition à partir d'un produit vectoriel, $\vec{L}_O$ est perpendiculaire aux vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{v}$. En conséquence :

- si le mouvement de M est plan et que O appartient au plan du mouvement, le vecteur $\vec{L}_O$ est perpendiculaire à ce plan à tout instant. Sa direction est donc fixe et perpendiculaire au plan du mouvement. La réciproque est vraie.
- si le mouvement de M est rectiligne et inscrit sur une droite $\mathcal{D}$ passant par O, $\vec{L}_O$ est nul à tout instant puisque les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires à tout instant. La réciproque est vraie.
- Le moment cinétique dépend du point par rapport auquel on le calcule et que l'on indique en indice. En effet,

$$\vec{L}_B = \overrightarrow{BM} \wedge \vec{p} = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}\right) \wedge \vec{p} = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{p} + \overrightarrow{AM} \wedge \vec{p} = \vec{L}_A + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{p}$$

1.1.2. Moment cinétique par rapport à un axe orienté Δ

on tient compte du vecteur unitaire

Le moment cinétique de M par rapport à l'axe orienté $\Delta = (O, \vec{u}_\Delta)$ est la projection orthogonale de $\vec{L}_O$ sur l'axe Δ :

$$\boxed{\boldsymbol{L_\Delta = \vec{L}_O . \vec{u}_\Delta = m\left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}\right) . \vec{u}_\Delta}}$$

Comme le moment cinétique par rapport à un point, le moment cinétique par rapport à un axe dépend du référentiel d'étude et se mesure en $\mathrm{J.s}$. Par contre, il ne dépend pas du choix du point O appartenant à l'axe Δ utilisé pour le calculer mais seulement de la direction et de l'orientation de Δ. En effet si l'on considère deux points A et B appartenant à l'axe Δ, le produit scalaire de $\vec{L}_B$ par $\vec{u}_\Delta$ donne :

$$\vec{L}_B . \vec{u}_\Delta = \vec{L}_A . \vec{u}_\Delta + \left(\overrightarrow{BA} \wedge \vec{p}\right) . \vec{u}_\Delta$$

Or A et B appartiennent à Δ donc $\overrightarrow{AB}$ est colineaire à $\vec{u}_\Delta$ et $\overrightarrow{BA} \wedge \vec{p}$ est perpendiculaire à $\vec{u}_\Delta$. Le terme $\left(\overrightarrow{BA} \wedge \vec{p}\right) . \vec{u}_\Delta$ s'annule et finalement :

$$\vec{L}_B . \vec{u}_\Delta = \vec{L}_A . \vec{u}_\Delta$$

Ce qui prouve que le point de l'axe choisi pour calculer L_Δ n'a pas d'importance.

1.1.3. Cas où le point matériel est en mouvement circulaire

Lorsque M est en mouvement circulaire sur un cercle de centre O et de rayon R, on a intérêt à le repérer en coordonnées cylindriques de centre O, d'axe (Oz) perpendiculaire au plan du cercle et d'angle polaire θ. On utilise les relations établies dans le chapitre cinématique du point :

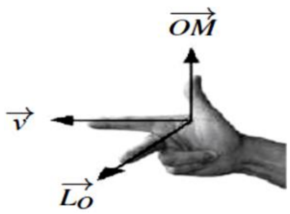
$$\overrightarrow{OM} = R\vec{u}_r \;\; et \;\; \vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

On considère $\Delta = (O, \vec{u}_z)$ et on calcule $\vec{L}_O$ et $L_\Delta = L_{(Oz)}$:

$$\boxed{\boldsymbol{\vec{L}_O = m\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v} = m(R\vec{u}_r) \wedge \left(R\dot{\theta}\vec{u}_\theta\right) = mR^2\dot{\theta}\vec{u}_z}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{L_{(Oz)}(M) = \vec{L}_O . \vec{u}_z = mR^2\dot{\theta}}}$$

On peut trouver la direction de $\vec{L}_O$ à l'aide de la règle de la main droite representée sur la figure suivante :

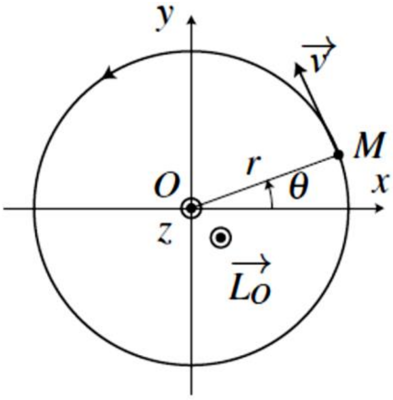


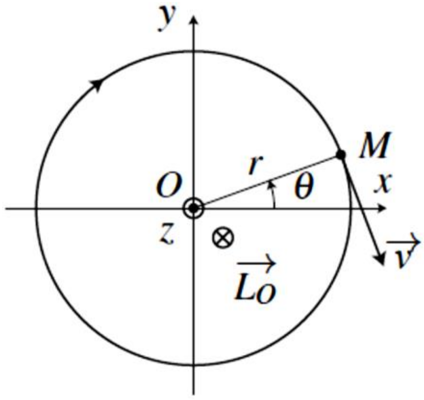
Ainsi :

- lorsque la révolution du point M se fait dans le sens direct autour de $\vec{u}_z$, $\dot{\theta} > 0$ et $\vec{L}_O$ est selon $+\vec{u}_z$;
- lorsque la révolution du point M se fait dans le sens indirect autour de $\vec{u}_z$, $\dot{\theta} < 0$ et $\vec{L}_O$ est selon $-\vec{u}_z$;

Le signe de $L_{(Oz)}(M)$ permet donc de déterminer le sens de la révolution circulaire de M :

- si $L_{(Oz)}(M) > 0$, la révolution se fait dans le sens direct dans le plan orienté par $\vec{u}_z$;
- si $L_{(Oz)}(M) < 0$, la révolution se fait dans le sens indirect dans le plan orienté par $\vec{u}_z$





1.1.4.Notion de moment d'inertie

Plus généralement, lorsque l'axe Δ est fixe, on peut le faire coïncider avec l'axe (Oz) et représenter M à l'aide de ses coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$ et $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$. Calculons $L_{(Oz)}(M) = \vec{L}_O.\vec{u}_z$ qui correspond à la composante selon $\vec{u}_z$ du moment cinétique de M par rapport à O :

$$\vec{L}_O = m\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v} = m(r\vec{u}_r + z\vec{u}_z) \wedge \left(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z\right)$$

$$\Rightarrow \vec{L}_O = m\left(-rz\dot{\theta}\vec{u}_r + (\dot{r}z - r\dot{z})\vec{u}_\theta + r^2\dot{\theta}\vec{u}_z\right) \Rightarrow L_{(Oz)}(M) = mr^2\dot{\theta}$$

En coordonnées cylindriques d'axe (Oz), on définit le moment d'inertie d'un point M de coordonnées (r, θ, z) par rapport à l'axe (Oz) :

$$\boxed{J_{(Oz)}(M) = mr^2}$$

Le moment cinétique de M par rapport à (Oz) est alors égal au produit du moment d'inertie $J_{(Oz)}(M)$ par la vitesse angulaire $\dot{\theta}$:

$$\boxed{L_{(Oz)}(M) = J_{(Oz)}(M)\,\dot{\theta}}$$

2. Moment cinétique d'un solide ou d'un système de points

On se restreint au moment cinétique L_Δ d'un solide ou d'un système de points par rapport à un axe orienté Δ.

2.1. Cas d'un système indéformable

2.1.1. Moment cinétique par rapport à un axe orienté

On considère un système constitué de plusieurs points matériels M_i de masses m_i de moments cinétiques par rapport à l'axe orienté Δ : $L_\Delta = L_\Delta(M_i)$. Le moment cinétique du système de points est obtenu par sommation des moments cinétiques de chacun des points :

$$\boxed{L_\Delta = \sum_i L_\Delta(M_i)}$$

Les moments cinétiques par rapport à Δ étant algébriques, il faut être rigoureux sur les signes.

2.1.2. Cas des coordonnées cylindriques

Lorsque l'axe Δ est fixe, on utilise généralement les coordonnées cylindriques d'axe (Oz) confondu avec Δ. Le moment cinétique de chaque point M_i est donné par la relation :

$$L_{(Oz)}(M_i) = m_i r_i^2 \dot{\theta}_i = J_{(Oz)}(M_i)\,\dot{\theta}_i$$

où $J_{(Oz)}(M_i) = m_i r_i^2$ est le moment d'inertie du point M_i par rapport à (Oz) et $\dot{\theta}_i$ sa vitesse angulaire :

$$\boxed{L_{(Oz)} = \sum_i L_{(Oz)}(M_i) = \sum_i J_{(Oz)}(M_i)\,\dot{\theta}_i}$$

Exercice d'application

Soient deux points M_1 et M_2 de même masse m en rotation circulaire et uniforme de centre O et de rayon R dans le plan (Oxy).

1. Que vaut le moment d'inertie $J_{(Oz)}$ de chacun des points ?

2. On envisage maintenant les deux cas suivants : le cas où les points M_1 et M_2 ont la même vitesse angulaire $\dot{\theta}$ et le cas où ils ont des vitesses angulaires opposées. Que valent dans chacun des cas $L_{(Oz)}(M_1)$, $L_{(Oz)}(M_2)$, $L_{(Oz)}$? On fera un schéma dans chacun des cas.

2.2. Cas d'un solide en rotation par rapport à un axe

On considère un solide en rotation à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ autour d'un axe orienté fixe dans un référentiel $\mathcal{R}$. On choisit l'axe (Oz) pour qu'il coincide avec cet axe de rotation. On modélise le solide par un ensemble de points matériels M_i de masses m_i reperées en coordonnées cylindriques d'axe (Oz) : $M_i(r_i, \theta_i, z_i)$.

2.2.1.Moment d’inertie d’un solide

On rappelle une relation essentielle vue en cinématique du solide : **chaque point d’un solide en rotation autour d’un axe fixe possède la même vitesse angulaire**. Le mouvement du solide est alors un cas particulier du mouvement d’un système de points dans lequel la vitesse angulaire de chacun des points du système est la même. On peut donc factoriser $L_{(Oz)}$ par la vitesse angulaire commune $\dot{\theta}$:

$$L_{(Oz)} = \sum_i L_{(Oz)}(M_i) = \left(\sum_i J_{(Oz)}(M_i)\right)\dot{\theta} = J_{(Oz)}\dot{\theta}$$

Le moment d’inertie $J_{(Oz)}$ du solide par rapport à l’axe est défini par la somme des moments d’inertie par rapport à chacun des points le constituant :

$$\boxed{\boldsymbol{J_{(Oz)} = \sum_i J_{(Oz)}(M_i)}}$$

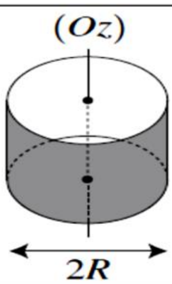
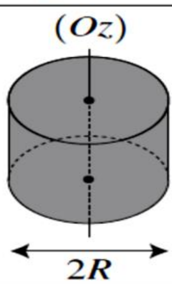
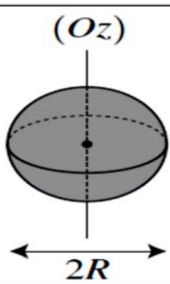
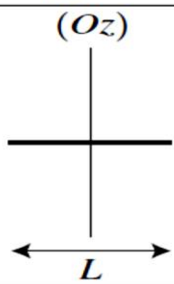
2.2.2.Moment cinétique d’un solide par rapport à un axe orienté (Oz)

Le moment cinétique par rapport à un axe (Oz) d’un solide en rotation autour de (Oz) à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ est égal au produit du moment d’inertie $J_{(Oz)}$ du solide par sa vitesse angulaire:

$$\boxed{\boldsymbol{L_{(Oz)} = J_{(Oz)}\dot{\theta}}}$$

2.2.3.Moment d’inertie de quelques solides homogènes

Le moment d’inertie d’un solide par rapport à un axe est une caractéristique intrinsèque que l’on peut mesurer. On peut également le calculer dans certains cas simples. Pour information, on donne les moments d’inertie par rapport à l’axe (Oz) dessiné sur les figures suivantes pour des solides homogènes de masse m :

cylindre vide de rayon R	cylindre plein de rayon R	boule de rayon R	barre de longueur L
mR^2	$\frac{1}{2}mR^2$	$\frac{2}{5}mR^2$	$\frac{1}{12}mL^2$
			

2.2.4.Evolution du moment d'inertie en fonction de la répartition des masses

La contribution d'une masse m au moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe (Oz) est égale à mr^2 où r est sa distance à l'axe (Oz).

Plus une masse m est éloignée de l'axe de rotation(Oz), plus sa contribution au moment d'inertie par rapport à (Oz) est importante.

Ceci explique pourquoi le moment d'inertie d'un cylindre plein est inférieur à celui d'un cylindre creux de même masse : une partie importante de sa masse est située à faible distance de l'axe et contribue peu à son moment d'inertie.

La mesure du moment d'inertie d'un solide permet également d'obtenir des informations sur la répartition interne des masses.

3. Moment d'une force

On considère une force $\vec{f}$ qui s'applique en un point M.

3.1. Moment d'une force par rapport à un point O

Le moment en O de la force $\vec{f}$ s'appliquant en M est le vecteur defini par le produit vectoriel :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{f}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}}$$

Sa norme se mesure en $\mathrm{J} = \mathrm{N.m}$.

Le moment des forces par rapport à un point est une grandeur additive : si on considère deux forces $\vec{f_1}$ et $\vec{f_2}$ qui s'appliquent sur M :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{f_1} + \vec{f_2}) = \overrightarrow{OM} \wedge (\vec{f_1} + \vec{f_2}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f_1} + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f_2} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{f_1}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{f_2})$$

Le moment de la somme des forces est la somme des moments.

<u>Remarque</u> : lorsque l'on s'occupe du mouvement d'un point M, la force s'applique forcément en M. Lorsque l'on s'occupe d'un système de points ou d'un solide, le point M est le point d'application de la force.

3.2. Moment d'une force par rapport à un axe orienté Δ

3.2.1. Définition

Le moment de la force $\vec{f}$ par rapport à l'axe orienté $\Delta = (O, \vec{u}_\Delta)$ est la projection orthogonale de $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{f})$ sur l'axe Δ :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{f}) = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{f}).\vec{u}_\Delta = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}).\vec{u}_\Delta$$

$\mathcal{M}_\Delta(\vec{f})$ est une grandeur additive qui se mesure en joule. Elle ne dépend pas du point de l'axe choisi pour le calculer mais seulement de $\vec{f}$ et de la direction et de l'orientation de Δ.

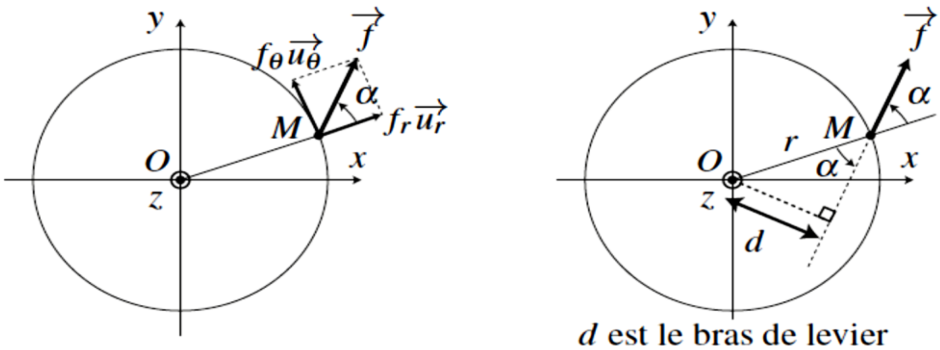
3.2.2.Calcul en coordonnées cylindriques

Lorsque l'axe Δ est fixe, on peut le faire coïncider avec l'axe (Oz) et repérer M par ses coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$. On peut alors calculer la composante selon $\vec{u}_z$ du moment $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f})$ qui correspond au moment de $\vec{f}$ par rapport à Oz :

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f}) = (r\vec{u}_r + z\vec{u}_z) \wedge (f_r\vec{u}_r + f_\theta\vec{u}_\theta + f_z\vec{u}_z)$$

$$\Rightarrow \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f}) = -zf_\theta\,\vec{u}_r + (zf_r - rf_z)\,\vec{u}_\theta + rf_\theta\,\vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}) = rf_\theta}$$



d est le bras de levier

Dans les deux cas de figures ci-dessus on a :

$$\mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}) = rf\sin\alpha$$

$$|r\sin\alpha| = d \Rightarrow \left|\mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f})\right| = fd$$

La distance d est appelée le bras de levier de la force $\vec{f}$. C'est la droite d'action de la force $\vec{f}$ de l'axe (Oz). Le signe de $\mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f})$ est :

- positif lorsque $\alpha \in]0,\pi[$. C'est le cas lorsque $\vec{f}$ tend à faire bouger M vers les θ croissants ;
- négatif lorsque $\alpha \in]-\pi,0[$. C'est le cas lorsque $\vec{f}$ tend à faire bouger M vers les θ décroissants.

NB : On appelle droite d'action d'une force $\vec{f}$ appliquée en M, la droite $(M,\vec{f})$ passant par M et dirigée par le vecteur $\vec{f}$.

3.2.3.Notion de bras de levier

On appelle bras de levier la distance séparant l'axe Δ de la droite $(M,\vec{f})$ de la force $\vec{f}$. La valeur absolue $\left|\mathcal{M}_\Delta(\vec{f})\right|$ du moment de $\vec{f}$ par rapport à l'axe Δ est :

$$\boxed{\left|\mathcal{M}_\Delta(\vec{f})\right| = \textbf{norme de la force} \times \textbf{bras de levier}}$$

Pour déterminer le signe de $\mathcal{M}_\Delta(\vec{f})$, on peut au choix :

- rechercher le sens du projeté de $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}$ sur la droite orientée Δ ;
- regarder le sens dans lequel la force $\vec{f}$ tend à faire tourner M autour de Δ :
  - si ce sens est direct, $\mathcal{M}_\Delta(\vec{f}) > 0$;
  - si ce sens est indirect, $\mathcal{M}_\Delta(\vec{f}) < 0$.

3.2.4. Cas où $\mathcal{M}_\Delta(\vec{f})$ est nul

Le moment d'une force $\vec{f}$ non nulle par rapport à un axe orienté Δ est nul dans deux cas :

$$\boxed{\mathcal{M}_\Delta(\vec{f}) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \vec{f} \parallel \vec{u}_\Delta \\ \textbf{ou} \\ \text{la droite d'action de } \vec{f} \text{ coupe } \Delta \end{cases}}$$

4. Loi du moment cinétique pour un point matériel

On étudie le mouvement d'un point matériel M de masse m dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$. Le point M est soumis à un ensemble de forces $\vec{f_i}$. On note O un point fixe et Δ une droite orientée fixe contenant O. On choisit l'axe (Oz) de telle sorte que $\Delta = (Oz)$. A l'instant t, on note $\overrightarrow{OM}$, $\vec{v}$ et $\vec{p} = m\vec{v}$ les vecteurs position, vitesse et quantité de mouvement de M dans $\mathcal{R}$. On note egalement $\vec{L}_O$ le moment cinétique de M par rapport à O, $L_{(Oz)}$ son moment cinétique par rapport à $\Delta = (Oz)$, $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{f_i})$ le moment de la force $\vec{f_i}$ par rapport à O et $\mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f_i})$ son moment par rapport à $\Delta = (Oz)$.

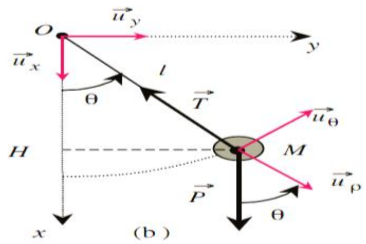
4.1. Loi du moment cinetique par rapport à un point fixe

La dérivée temporelle du moment cinétique de M par rapport à O est égale à la somme des moments des forces calculées par rapport au même point O :

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{f}_i)}$$

Exercice d'application

Un pendule simple est constitué d'une masse m considéré ponctuelle fixe à l'extrémité libre M d'un fil. La longueur du fil est l.



Déterminer la position d'équilibre du système par application du théorème du moment cinétique.

4.2. Cas de conservation du moment cinétique

Cette loi est particulièrement intéressante lorsque la somme des moments des forces $\vec{f}_i$ par rapport à O s'annule. Cela correspond à :

$$\sum_i \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}_i = \overrightarrow{OM} \wedge \sum_i \vec{f}_i = \vec{0}$$

En pratique, cette situation n'arrive que dans deux cas :

- celui où $\sum_i \vec{f}_i = \vec{0}$ à tout instant. Le point M est alors isolé ou pseudo-isolé. Il est en mouvement rectiligne et uniforme ou immobile ;
- celui où $\sum_i \vec{f}_i \parallel \overrightarrow{OM}$ à tout instant. La droite d'action de la résultante des forces passe alors constamment par O. M est soumis à une force centrale de centre O.

4.3. Loi du moment cinétique par rapport à un axe fixe

La dérivée temporelle du moment cinétique de M par rapport à l'axe orienté fixe (Oz) est égale à la somme des moments des forces calculées par rapport à ce même axe :

$$\boxed{\frac{dL_{(Oz)}}{dt} = \sum_i \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}_i)}$$

5. Loi du moment cinétique pour un solide en rotation

On s'intéresse au mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe orienté (Oz) fixe dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$. Son moment d'inertie par rapport à (Oz) est noté $J_{(Oz)}$. Son mouvement est caracterisé par sa vitesse angulaire $\dot{\theta}$. Son moment cinétique par rapport à (Oz) vaut $L_{(Oz)} = J_{(Oz)}\dot{\theta}$. Il est soumis aux forces extérieures $\vec{f}_i$ de moments $\mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}_i)$.

5.1. Loi scalaire du moment cinétique pour un solide

Dans un référentiel $\mathcal{R}$ galileén, la derivée temporelle du moment cinétique du solide par rapport à son axe de rotation fixe (Oz) est égale à la somme des moments des forces calculées par rapport à ce même axe :

$$\boxed{\frac{dL_{(Oz)}}{dt} = \sum_i \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{f}_i)}$$

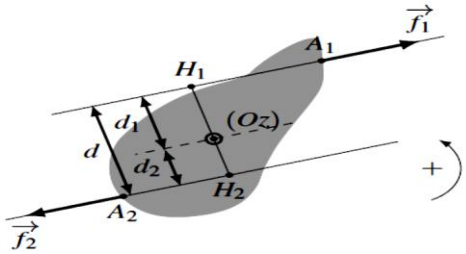
5.2. Cas de conservation du moment cinétique

Le moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe est conservé si la somme des moments des forces extérieures qui lui sont appliquées est nulle.

5.3. Couples

5.3.1. Couples de forces

Deux forces $\vec{f}_1$ et $\vec{f}_2$ opposées s'appliquant respectivement en A_1 et A_2 forment un couple de forces. Leur resultante est nulle : $\vec{f}_1 + \vec{f}_2 = \vec{0}$.



5.3.2. Généralisation

On peut généraliser la notion de couple à tous les cas où la somme des forces est nulle et le moment des forces par rapport à un axe (Oz) n'est pas nul, sans se preoccuper de savoir s'il a fallu deux forces pour realiser cette situation.

5.3.3. Couple moteur et couple de freinage

On considère un solide en rotation autour d'un axe orienté fixe (Oz) auquel on applique un couple de moment par rapport à (Oz) egal à Γ. La loi du moment cinétique par rapport à l'axe (Oz) appliquée au solide implique que :

$$\boxed{\frac{dL_{(Oz)}}{dt} = J_{(Oz)}\ddot{\theta} = \Gamma}$$

On suppose que le solide tourne dans le sens direct autour de (Oz) ce qui implique que $\dot{\theta} > 0$ et on distingue deux cas selon le signe de Γ :

- $\Gamma > 0$, $\ddot{\theta} > 0$ et la vitesse angulaire du solide en rotation augmente. La rotation du solide est accélérée ;
- $\Gamma < 0$, $\ddot{\theta} < 0$ et la vitesse angulaire du solide en rotation diminue. La rotation du solide est freinée.

On peut tenir le même raisonnement dans le cas où $\dot{\theta} < 0$ et au final :

- lorsque Γ est du meme signe que $\dot{\theta}$, la vitesse de rotation du solide augmente en valeur absolue. Le couple est un couple moteur.
- lorsque Γ est du signe opposé à $\dot{\theta}$, la vitesse de rotation du solide diminue en valeur absolue. Le couple est un couple de freinage.

6. Application aux dispositifs rotatifs

Un dispositif rotatif est un dispositif dans lequel un solide indéformable appelé **rotor** est en rotation autour d'un axe fixe par rapport à un solide immobile **stator**.

6.1. Liaison pivot d'axe (Oz)

6.1.1. Définition

Une liaison pivot d'axe (Oz) restreint les possibilités de mouvement du rotor à une rotation d'axe (Oz) par rapport au stator.

6.1.2. Action de liaison et liaison pivot idéale d'axe (Oz)

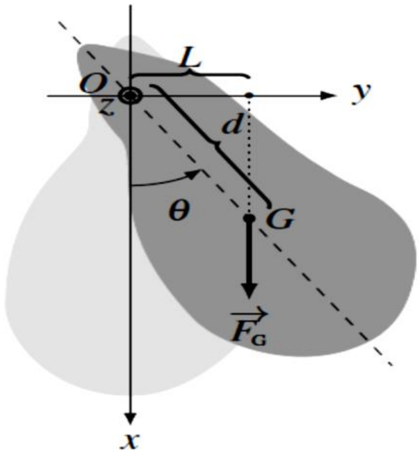
L'action de liaison d'une liaison pivot idéale d'axe (Oz) a un moment par rapport à l'axe (Oz) égal à 0 :

$$\boxed{\mathcal{M}_{(Oz)}(\text{liaison}) = 0}$$

7. Pendule pesant

7.1. Position du problème et équation du mouvement

Un pendule pesant est un solide de masse m de forme quelconque mobile dans le champ de pesanteur terrestre autour d'un axe horizontal fixe ne passant pas par son centre de gravité G. On note (Oz) l'axe de rotation du solide, G son centre de gravité et $J_{(Oz)}$ son moment d'inertie par rapport à l'axe (Oz). On repère la position du solide par l'angle θ que fait la droite (OG) avec la verticale descendante (Ox). On suppose que la liaison entre le solide et le référentiel terrestre est une liaison pivot parfaite d'axe (Oz).



Le solide est soumis à :

- l'action exercée par la liaison pivot. On suppose cette liaison pivot idéale, ce qui implique que son moment par rapport à l'axe (Oz) est nul ;
- son poids vertical descendant qui s'applique au centre de gravité G. Son moment par rapport à (Oz) est égal en module au produit $mg \times L$ où $L = d\sin\theta$ est le bras de levier representé sur la figure.

  Cette force tend à ramener le pendule vers sa position d'équilibre. Le signe de son moment par rapport à (Oz) est opposé à celui de $\sin\theta$. En effet, on voit sur la figure que $\theta > 0$, $\sin\theta > 0$ et $\mathcal{M}_{(Oz)} < 0$. Au final :

$$\mathcal{M}_{(Oz)} = -mgd\sin\theta \Longrightarrow \frac{dL_{(Oz)}}{dt} = -mgd\sin\theta$$

$$L_{(Oz)} = J_{(Oz)}\dot{\theta} \Longrightarrow \frac{dL_{(Oz)}}{dt} = J_{(Oz)}\ddot{\theta} = -mgd\sin\theta \Longrightarrow \boldsymbol{\ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_{(Oz)}}\sin\theta = 0}$$

Cette équation est du type $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$ avec

$$\boxed{\boldsymbol{\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{J_{(Oz)}}}}}$$

7.2. Oscillations de faible amplitude

Lorsque les oscillations sont de faible amplitude au voisinage de la position d'équilibre $\theta_{eq} = 0$, $\sin\theta \cong 0$ et l'équation différentielle peut être linéarisée :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \quad \text{où} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{J_{(Oz)}}}$$

On reconnaît une équation d'oscillateur harmonique dont les solutions sont des sinusoïdes de pulsation ω_0 :

$$\theta(t) = \theta_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

θ_m et φ_0 sont des constantes d'intégration que l'on determine à partir des conditions initiales.

7.3. Intégrale première du mouvement et étude qualitative

7.3.1. Obtention d'une intégrale première du mouvement

On peut établir une intégrale première du mouvement à partir de l'équation différentielle. Pour cela multiplions là par $\dot{\theta}$:

$$J_{(Oz)}\ddot{\theta}\dot{\theta} + mgd\sin\theta\,\dot{\theta} = 0 \Longrightarrow J_{(Oz)}\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\theta}^2}{2}\right) - mgd\frac{d}{dt}(\cos\theta) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}J_{(Oz)}\dot{\theta}^2 - mgd\cos\theta = constante = E_m$$

La quantité $\frac{1}{2}J_{(Oz)}\dot{\theta}^2 - mgd\cos\theta = E_m$ est donc une intégrale première du mouvement homogène à une énergie. En effet $J_{(Oz)}$ se mesure en $kg.m^2$ et $\dot{\theta}$ est homogène à l'inverse d'un temps donc $J_{(Oz)}\dot{\theta}^2$ se mesure en $\mathrm{kg.m^2.s^{-2}} = \mathrm{J}$.

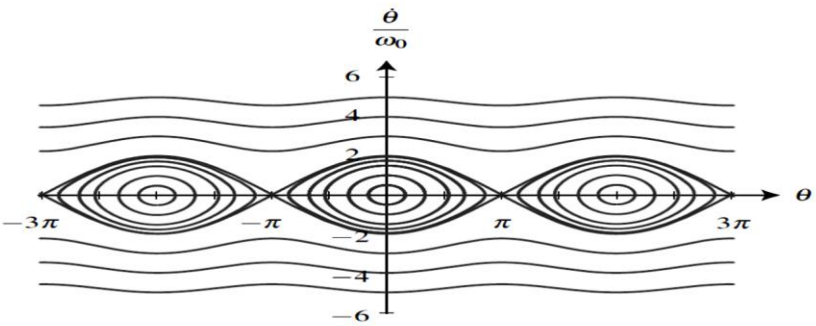
Le terme $\frac{1}{2}J_{(Oz)}\dot{\theta}^2$ correspond à l'énergie cinétique de la barre en rotation autour de l'axe (Oz). Le terme $-mgd\cos\theta$ est l'énergie potentielle de pesanteur du solide car $-d\cos\theta$ est l'altitude du centre de gravité G comptée à partir de O. E_m est donc l'énergie mécanique du solide. C'est une constante qui dépend des conditions initiales du mouvement.

7.3.2.Portrait de phase

On peut utiliser l'intégrale première du mouvement pour expliciter la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ en fonction de l'angle θ et de l'énergie mécanique E_m. On trouve :

$$\frac{\dot{\theta}}{\omega_0} = \pm\sqrt{2\left(\frac{E_m}{mgd} + \cos\theta\right)}$$

On trace alors $\frac{\dot{\theta}}{\omega_0}$ en fonction de θ pour différentes valeurs de $\frac{E_m}{mgd}$ pour obtenir le portrait de phase du pendule pesant dans le plan sans dimension $\left(\theta, \frac{\dot{\theta}}{\omega_0}\right)$. On rappelle que l'énergie cinétique étant positive, l'énergie mécanique ne peut jamais devenir inférieure au minimum d'énergie potentielle, à savoir $-mgd$, ce qui implique que $\frac{E_m}{mgd} > -1$. Ce diagramme est représenté sur la figure suivante :



8. Energie d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

On considère un solide en rotation autour d'un axe orienté fixe noté (Oz) à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ par rapport à un référentiel galiléen $\mathcal{R}$. Dans cette partie on établit l'expression de l'énergie cinétique du solide et la loi de l'énergie cinétique pour un solide en rotation.

8.1. Energie cinétique d'un solide en rotation

On modélise le solide par un ensemble de points matériels M_i de masses m_i reperées en coordonnées cylindriques d'axe (Oz) : $M_i(r_i, \theta_i, z_i)$.

$$J_{(Oz)} = \sum_i J_{(Oz)}(M_i) = \sum_i m_i r_i^2$$

Un point M_i quelconque du solide est en mouvement circulaire uniforme de rayon r_i à la vitesse angulaire commune $\dot{\theta}$. Sa vitesse est donc $\vec{v}_i = r_i\dot{\theta}\vec{u}_{\theta_i}$ et son énergie cinétique :

$$E_c(M_i) = \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2}m_i r_i^2\dot{\theta}^2$$

L'énergie cinétique du solide est obtenue par sommation de l'énergie cinétique de chacun des points qui le constituent :

$$E_c = \sum_i E_c(M_i) = \sum_i \frac{1}{2}m_i r_i^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\dot{\theta}^2$$

Où on reconnait l'expression du moment d'inertie du solide : $J_{(Oz)} = \sum_i m_i r_i^2$.

Un solide de moment d'inertie $J_{(Oz)}$ en rotation autour d'un axe fixe (Oz) à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ possède l'énergie cinétique :

$$\boxed{\boldsymbol{E_c = \frac{1}{2}J_{(Oz)}\dot{\theta}^2}}$$

8.2. Puissance d'une force appliquée sur un solide en rotation

La puissance de la force $\vec{f}_i$ appliquée en un point M_i d'un solide en rotation autour de l'axe (Oz) est égale au produit du moment par rapport à (Oz) de cette force par la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ de rotation du solide autour de cet axe.

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{P}(\vec{f}_i) = \vec{\mathcal{M}}_{(Oz)}(\vec{f}_i)\dot{\theta}}}$$

8.3. Loi de l'énergie cinétique pour un solide indéformable

Dans le référentiel $\mathcal{R}$ galiléen, la dérivée temporelle de l'énergie cinétique d'un solide indéformable en rotation autour d'un axe fixe, est égale à la puissance de l'ensemble des forces extérieures $\vec{f}_i$ qu'on lui applique :

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{dE_c}{dt} = \sum_i \mathcal{P}(\vec{f}_i)}}$$